命题逻辑

本节提要

问题1：什么是命题逻辑?
问题2：如何判定命题可满足?

引言

- 编程语言中的布尔表达式
  - 程序分析时需要考虑布尔表达式的可满足性
    - **(a >= 5) && (a <= 10) ; p || !q**
- 搜索引擎中的布尔检索
  - 表达检索者的查询意图
    - **(“ Yuan Yao” OR “姚远”) AND “Computer Science” AND (NOT “Female”)**

- 布尔运算符
  - 与，合取，**Conjunction (AND) (∧, &, ·)**
  - 或，析取，**Disjunction (OR) (∨)**
  - 非，否定，**Negation (NOT) (¬, ~, -)**

逻辑

- 什么是逻辑?
  - 形式化：研究某个形式语言的有效推理
    - 如某个数学定理是否成立
  - 非形式化：研究自然语言中的论证
- 逻辑有什么作用?
  - 用来做分析与论证
  - 逻辑引导人们通过推理获得事物的本质
  - 逻辑让描述变得严谨、无歧义

逻辑

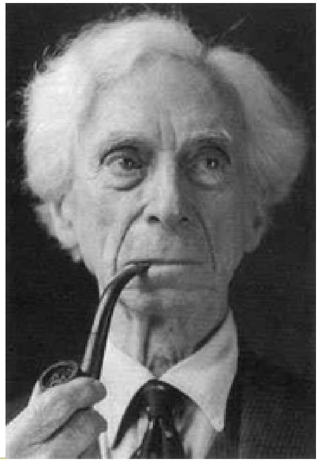
- 日常生活中的逻辑：
  - 父子对话：
    - 子：爸爸，我要玩游戏
    - 父：不做完作业不能玩
  - 如果以p表示“做完作业”，q表示“玩游戏”：
    - 常理： $p \rightarrow q$
    - 数学：$\neg p \rightarrow \neg q$（等价命题：$q \rightarrow p$）

命题

- 命题（proposition）是无法严格定义的，一般可用如下解释

“命题”主要是指一些字或者其它符号组合成的一种形式，这种形式所表达的或者为真或者为假。

——罗 素



命题

- 命题指可以判断真假的陈述句
- 判断下列句子是否为命题
  - ✓ 税收下降了
  - ✓ 我的收入上升了
  - ✓ 今天是星期五
  - ✗ 你会说英语吗?
  - ✗ 3-x=5
  - ✗ 我们走吧!
  - ✓ 任一足够大的偶数一定可以表示为两个素数之和。
  - ✗ 他是个多好的人呀!
  - ✗ “我现在说的是假话。”

命题变元

- 命题变元：代表命题的变量
  - 常用小写字母表示，如： p, q, r

- 命题变元的取值范围为： {T, F}
  - p: 今天是周六（p=F）
  - q: 2+2=4 （q =T）

原子命题和复合命题

- 自然语言中的复合句与连词
- 复合命题
  - 并非外面在下雨。
  - 张挥与王丽都是三好学生。
  - 张晓静不是江西人就是安徽人。
  - 如果2+3=6，则π是有理数。
  - $\sqrt{3}$是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

复合命题是否为真取决于：**作为复合成分的子命题的真假** 以及 **连词的语义**

否定连接词

~*p*/ ¬*p*：非*p*

p	$\neg p$
F	T
T	F

¬ 的真值表

*p*所有可能的取值

合取连接词

***p*∧*q*：“*p* 并且 *q*”**

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

$p \wedge q$=T iff p 和 q 均为T

<p,q> 所有可能的取值

析取连接词

***p*∨*q*：“*p* 或 *q*”**

$p\vee q$=F iff both p and q 均为F

p	q	$p\vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

<*p*,*q*> 所有可能的取值

例

- 今天周二，开学第一节课
- 我们周二和周四有离散数学课
- 我们周二或者周四有离散数学课

- 套餐的菜单上写着：鸡腿饭或者叉烧饭，苹果或香蕉

异或连接符

蕴涵连接词

***p→q*：“如果 *p* 则 *q*”**

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

***p→q* =F iff**

***p*为T而*q*为F**

蕴涵连接词

- $p \to q$：“若 p，则 q”（条件语句）

- “想得奖，仅当/只有考试得85分以上”
  - “得奖” → “考试得85分以上”
  - 考不到85分以上，甭想得奖
- 不能玩游戏，除非做完作业（$\neg p$, 除非 q）
  - 没有做完作业，就不能玩（$\neg q \to \neg p$）
  - 玩 → 做完作业 （$p \to q$）

- 如果p则q、只要p则q、p仅当/只有q、 ¬p除非q

双蕴含连接词

$p \leftrightarrow q$：“p当且仅当 q”

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

$p \leftrightarrow q$ 为真：意味着 p 和 q **总是** 有相同的真值。

$p \leftrightarrow q$与 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 有相同的真值

命题表达式（命题逻辑公式）

- 命题表达式的递归定义：
  - 命题变元是命题表达式
  - 若A是命题表达式，则（$\neg$A）也是命题表达式。
  - 若A和B均是命题表达式，则（$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$ 均是命题表达式。
  - 只有有限次应用上述规则形成的符号串才是命题表达式。
- 例子：
  - $(p\rightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow r)$, $p\rightarrow(q\rightarrow r)$是命题表达式
  - $pq\rightarrow r$, $p\rightarrow\wedge q$不是命题表达式。
- 运算符的优先级：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$

将自然语言翻译成命题表达式

只有你主修计算机科学或不是新生，才可以从校园网访问因特网.

a: 你可以从校园网访问因特网

c: 你主修计算机科学

f: 你是新生

$a \rightarrow (c \vee \neg f)$;

将自然语言翻译成命题表达式

除非你满16周岁, 否则只要你身高不足4英尺就不能乘滑行游乐车.

q: 你能乘滑行游乐车

r: 你身高不足4英尺

s: 你满16周岁

$\neg s \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$

$(\neg s \land r) \rightarrow \neg q$, …

逻辑谜题

- 泥巴孩谜题：一个男孩和一个女孩玩耍回来，额头上都弄上了泥巴。假设他们看不见自己的额头。父亲说“你们当中至少有一个人额头上有泥”。父亲问孩子“你知道你额头上有没有泥？”问了两遍，孩子们如何回答?

p：男孩的额头上有泥

q：女孩的额头上有泥

$p \lor q$ 为真

逻辑谜题

有 A、B、C 3 个人，其中 C 被蒙住了双眼。3 个人各带一个帽子，帽子有白、黑 2 种，但不全为白色的。3 个人都看不见自己头上的帽子，A 先看看 B 和 C，说无法确定自己帽子什么颜色；B 看看 A 和 C，说也不能确定自己头上帽子颜色；这时候 C 说他知道自己帽子的颜色了。请问：C 的帽子是什么颜色？请用命题逻辑进行演算，证明结论正确性。

本节提要

问题1：什么是命题逻辑?

- 与命题表达式真假有关的判断

问题2：如何判定命题可满足?

命题表达式的真值确定

- 表达式：$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$

p q r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg r$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$
0 0 0	1	0	1	1
0 0 1	1			1
0 1 0	1			1
0 1 1	1	1	0	0
1 0 0	0	0	1	1
1 0 1	0	0	0	1
1 1 0	0	0	1	1
1 1 1	0	0	0	1

该表达式的一种“成真指派”

该命题表达式的所有指派

永真式、矛盾式与可能式

- 永真式（重言式）：所有指派均为成真指派
  - $(p\to q)\leftrightarrow(\sim q\to\sim p)$ 对任意的p,q值均为1，为永真式。
- 矛盾式：所有指派均为成假指派
  - $p\wedge\neg p$ 对任意的p值均为0，为矛盾式。
- 可能式：同时存在成真和成假指派
  - $(\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{q})\wedge(\boldsymbol{p}\vee\boldsymbol{q})$:
    - 成真指派：**(p,q) = (1,1) or (0,1)**
    - 成假指派：**(p,q) = (1,0) or (0,0)**

逻辑等价

- p和q逻辑等价：在所有可能情况下p和q都有相同的真值。
  - 也就是说，$p\leftrightarrow q$是永真式。记为：$p\equiv q$
  - 例：$(p\leftrightarrow q)\equiv((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$

$(p\leftrightarrow q)\ \leftrightarrow\ ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$ 真值表：

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$	$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

常用的逻辑等价(1)

名称	等价
双重否定律	$p \equiv \neg\neg p$
幂等律	$p \equiv p \vee p$, $\mathrm{p} \equiv \mathrm{p} \wedge \mathrm{p}$
交换律	$p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$
结合律	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
分配律	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
德摩根律	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
吸收律	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

常用的逻辑等价(2)

否定律

名称	描述
支配律	$p\vee \mathrm{T}\equiv \mathrm{T},\ p\wedge \mathrm{F}\equiv \mathrm{F}$
恒等律	$p\vee \mathrm{F}\equiv p,\ p\wedge \mathrm{T}\equiv p$
排中律	$p\vee\neg p\equiv \mathrm{T}$
矛盾律	$p\wedge\neg p\equiv \mathrm{F}$
	$p\to q\equiv\neg p\vee q$
	$p\leftrightarrow q\equiv(p\to q)\wedge(q\to p)$
	$p\leftrightarrow q\equiv(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$
假言易位	$p\to q\equiv\neg q\to\neg p$
	$p\leftrightarrow q\equiv\neg q\leftrightarrow\neg p$
归缪论	$(p\to q)\wedge(p\to\neg q)\equiv\neg p$

逻辑等价的判定

- $\neg(p\to q)$和$p\wedge\neg q$是否逻辑等价?

$$\neg(p\to q)\equiv\neg(\neg p\vee q)$$

$$\equiv\neg(\neg p)\wedge\neg q$$

$$\equiv p\wedge\neg q$$

- $p\wedge q\to p\vee q$是否永真?

$$p\wedge q\to p\vee q\ \equiv\neg(p\wedge q)\vee(p\vee q)$$

$$\equiv(\neg p\vee\neg q)\vee(p\vee q)$$

$$\equiv\ \neg p\vee p\vee\neg q\vee q\equiv \mathrm{T}$$

通过逻辑等价进行推理

We know that Bill, Jim and Sam are from Boston, Chicago and Detroit, respectively. Each of following sentence is half right and half wrong:

Bill is from Boston, and Jim is from Chicago.
Sam is from Boston, and Bill is from Chicago.
Jim is from Boston, and Bill is from Detroit.

Tell the truth about their home town.

通过逻辑等价进行推理

- **We set :**
  - **P1 = Bill is from Boston**
  - **P2 = Jim is from Chicago.**
  - **P3 = Sam is from Boston**
  - **P4 = Bill is from Chicago.**
  - **P5 = Jim is from Boston**
  - **P6 = Bill is from Detroit.**

$p_1 \wedge p_3$ **is False**
$p_1 \wedge p_4$ **is False**
$p_2 \wedge p_4$ **is False**
$p_2 \wedge p_5$ **is False**
……

- **So, We have:**
  - $((p1 \wedge \sim p2) \vee (\sim p1 \wedge p2)) \wedge ((p3 \wedge \sim p4) \vee (\sim p3 \wedge p4)) \wedge ((p5 \wedge \sim p6) \vee (\sim p5 \wedge p6))$ 应该可满足

析取范式

等价替换：

$((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (\sim p_1 \wedge p_2)) \wedge ((p_3 \wedge \sim p_4) \vee (\sim p_3 \wedge p_4))$

$\equiv (((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (\sim p_1 \wedge p_2)) \wedge (p_3 \wedge \sim p_4)) \vee (((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (\sim p_1 \wedge p_2)) \wedge (\sim p_3 \wedge p_4))$

$\equiv (p_1 \wedge \sim p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4) \vee (\sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4) \vee (p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \sim p_3 \wedge p_4) \vee (\sim p_1 \wedge p_2 \wedge \sim p_3 \wedge p_4))$

$\equiv \mathbf{F} \vee (\sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4) \vee \mathbf{F} \vee \mathbf{F}$。

$\equiv \sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4$

由题意

继续：

$(\sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4) \wedge ((p_5 \wedge \sim p_6) \vee (\sim p_5 \wedge p_6))$

$\equiv (\sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4 \wedge \sim p_5 \wedge p_6)$ 可满足

So, Jim is from Chicago, Sam is from Boston, and Bill is from Detroit.

命题的可满足性

- 一个复合命题是可满足的，则存在一个对其变元的赋值使其为真

* **Boolean satisfiability problem (SAT)**：第一个**NPC**问题，至今没有一个高效的多项式算法能够解决

Sudoku谜题（九宫格数独游戏）

- $3^2 \times 3^2$的网格，3^2个3×3的子网格。
- 每行、每列及每宫填入数字1-9且不能重复。

4 →

	2	9				4		
			5		4	1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

Sudoku谜题（可满足性问题）

- s_{xyz}：第x行第y列的格子里填上数字z.

$\bigwedge_{y=1}^{9} \bigwedge_{z=1}^{9} \bigvee_{x=1}^{9} s_{xyz}$

every column contains every number

$\bigwedge_{x=1}^{9} \bigwedge_{z=1}^{9} \bigvee_{y=1}^{9} s_{xyz}$

every row contains every number

$\bigwedge_{i=0}^{2} \bigwedge_{j=0}^{2} \bigwedge_{z=1}^{9} \bigvee_{x=1}^{3} \bigvee_{y=1}^{3} s_{(3i+x)(3j+y)z}$

each of the nine 3 × 3 blocks contains every number

命题表达式的范式

- 为何要“范式”？
  - 对于给定公式的判定问题，可用真值表方法加以解释，但当公式中命题变元的数目较大时，计算量较大，每增加一个命题变元，真值表的行数要翻倍，计算量加倍；此外，对于同一问题，可以从不同的角度去考虑，产生不同的但又等价的命题公式，即同一个命题可以有不同的表达形式。这样给命题演算带来了一定的困难，因此有必要使命题公式规范化。

命题表达式的范式

- 一些术语：
  - 命题变元或命题变元的否定称为文字；
  - 有限个文字的析取式称为简单析取式，
    有限个文字的合取式称为简单合取式；
  - 由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式
    (DNF，Disjunctive Normal From)，
    由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式
    (CNF，Conjunctive Normal From)。

命题表达式的范式

例： ①：p，$\neg p$ ；
②：$p \vee q \vee \neg r$;
③：$\neg p \wedge q \wedge r$;
④：$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$;
⑤：$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$;

- 一个文字既是一个析取范式又是一个合取范式；
- 一个析取范式为矛盾式，当且仅当它的每个简单合取式是矛盾式；
- 一个合取范式为永真式，当且仅当它的每个简单析取式是永真式。

析取（合取）范式的存在性

- 定理：任一命题都存在着与之等价的析取范式与合取范式，但并不惟一
  - 例：$p \lor q \lor r$ 与 $(p \land \neg q) \lor q \lor r$

- 求 $(p \to q) \leftrightarrow r$ 的析取范式
  - $(\neg p \lor q) \leftrightarrow r$ （消去→）
  - $((\neg p \lor q) \land r) \lor (\neg(\neg p \lor q) \land \neg r)$ （消去↔）
  - $((\neg p \lor q) \land r) \lor ((p \land \neg q) \land \neg r)$ （否定号内移）
  - $(\neg p \land r) \lor (q \land r) \lor (p \land \neg q \land \neg r)$ （分配律、结合律）

主析取（主合取）范式的唯一性

- 定理：任何命题公式的主析取范式和主合取范式存在且唯一，即任何命题公式都有且仅有一个与之等价的主合取范式和主析取范式。
  - 包含所有命题变元或其否定一次且仅一次的简单合取式，称为极小项
  - 包含所有命题变元或其否定一次且仅一次的简单析取式，称为极大项
  - 由有限个极小项组成的析取范式称为主析取范式
  - 由有限个极大项组成的合取范式称为主合取范式

极小项与极大项

P	Q	R	极小项	极大项
0	0	0	m0= ¬P∧¬Q∧¬R	M0= P∨Q∨R
0	0	1	m1= ¬P∧¬Q∧R	M1= P∨Q∨¬R
0	1	0	m2= ¬P∧Q∧¬R	M2= P∨¬Q∨R
0	1	1	m3= ¬P∧Q∧R	M3= P∨¬Q∨¬R
1	0	0	m4= P∧¬Q∧¬R	M4= ¬P∨Q∨R
1	0	1	m5= P∧¬Q∧R	M5= ¬P∨Q∨¬R
1	1	0	m6= P∧Q∧¬R	M6= ¬P∨¬Q∨R
1	1	1	m7= P∧Q∧R	M7= ¬P∨¬Q∨¬R

三个命题变元的真值取值与极小项和极大项的对应对位关系表

求主析取（主合取）范式

- 求 $(p \to q) \leftrightarrow r$ 的主析取范式
  - $(\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ （析取范式）

$$\neg p \wedge r \equiv \neg p \wedge (\neg q \vee q) \wedge r$$
$$\equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$
$$q \wedge r \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

  - $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

    001 (m1)　011 (m3)　111 (m7)　100 (m4)

  - $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

    (M0)　(M2)　(M5)　(M6)

本节小结

问题1：什么是命题逻辑?

- 与命题真假有关的判断

问题2：如何判定命题可满足?

- 真值表与逻辑等价；范式与主范式

本节小结

- 命题逻辑就是涉及命题的逻辑领域

命题逻辑是逻辑学的一个分支。它也称为命题演算、句子演算、句子逻辑，有时也称为零阶逻辑。它涉及命题（可以是真或假）和命题之间的关系，包括基于它们的论证的构建。

与一阶逻辑不同，命题逻辑不处理非逻辑对象、以及关于它们的谓词或量词。然而，命题逻辑的所有机制都包含在一阶逻辑和高阶逻辑中。从这个意义上说，命题逻辑是一阶逻辑和高阶逻辑的基础。

命题逻辑是一个形式系统，有可以由以逻辑运算符结合原子命题来构成代表“命题”的公式，以及允许某些公式建构成“定理”的一套形式“证明规则”。

作业

- 见课程主页